第6讲 有理数复习

**知识梳理**

**专题讲解**

**专题1 有理数的基本概念**

有理数这部分的概念比较多，如有理数的概念、数轴、绝对值、相反数、倒数，这些概念有些比较难理解，概念与概念之间又容易混淆.

为了加强对概念的理解和辨析，对概念的考查常常是这部分的常见题型.

**例1：**下列叙述正确的有( ).

①零是整数中最小的数；②有理数中没有最大的数；③正数的绝对值是负数；④正数的相反数是负数.

A.4个 B.3个 C.2个 D.1个

[解析]整数分为正整数、0和负整数，因此负数比零小；有理数中没有最大的数，也没有最小的数；正数的绝对值是正数；正数的相反数是负数，因此只有②④正确.

[答案]C

**例2：**已知*a*，*b*互为相反数，*c*，*d*互为倒数，|*m*|=3，求的值.

[答案]由题意，得*a*+*b*=0，*cd*=1，*m*=±3.

当*a*+*b*=0，*cd*=1，*m*=3时，

原式=

当*a*+*b*=0，*cd*=1，*m*=-3时，

原式=

所以的值为2或-4.

**【变式训练】**

已知*a*、*b*互为相反数，*c*、*d*互为倒数，试求的值.

**满分解答：**

由*a*、*b*互为相反数可得，*a*+*b*=0且*|a|*=*|b|*，

由*c*、*d*互为倒数可得*cd*=1，

原式

**技巧贴士：**

将已知条件中的文字语言转化为我们的数学符号表达是本题的关键.本题还可以用特殊值法，如令分别代入原式中，也可以得到正解.

**专题2 有理数的运算**

进行有理数的加、减、乘、除、乘方运算时，(1)把一些特殊的算式巧妙地运用运算律，可以简化运算过程；(2)根据算式的特点，还可以把一项拆成两项，再重新组合，从而达到简化运算的目的.

**例3：**计算：(1)

[答案](1)原式=

(2)原式=

.

[方法点拨]有理数的混合运算中经常会出现这样或那样的错误，如(1)容易将-23当成-2×3；(2)注意去掉“-”号和括号时，括号里面各项都要改变符号.

**例4：**计算：

[解析]本题的算式由3个乘积组成，而每个乘积中都含有，因此可以逆用乘法分配律.

[答案].

**专题3 利用非负数的性质解题**

非负数的基本性质：几个非负数的和为0，则这几个非负数均为0.

**例5：**已知(*a*-1)2+|*b*-3|=0，求*a*2-2*ab*+2*b*2的值.

[答案]∵(*a*-1)2≥0，|*b*-3|≥0，且(*a*-1)2+|*b*-3|=0.

∴*a*-1=0且*b*-3=0，即*a*=1，*b*=3.

当*a*=1，*b*=3时，原式=12-2×1×3+2×32=13.

**专题4 有理数大小巧比较**

**(1)作差法.**

比较两个数的大小，可以先求出两数的差，看差大于零、等于零或小于零，从而确定两个数的大小，即若*a*-*b*>0，则*a*>*b*；若*a*-*b*=0，则*a*=*b*；若*a*-*b*<0，则*a*<*b*.

**例6：**比较的大小.

[答案]方法一：∵

.

方法二：∵

又∵.

即.

**(2)作商法.**

比较两个正数的大小，可以先求出这两个数的商，看商大于1、等于1或小于1，从而确定两个数的大小.

**例7：**，则有( ).

A.*A*<*B*<*C* B.*C*<*B*<*A* C.*B*<*A*<*C* D.*B*<*C*<*A*

[解析]通过计算比较大小难度较大，经过观察*A*、*B*、*C*三个都是正数，且分子、分母是四个连续整数两两相乘的积的比值，因此考虑作商比较更简便.

，且*A*>0，*B*>0.

∴*A*<*B*，同理可求得*B*<*C*.∴*A*<*B*<*C*，故选A.

[答案]A

**(3)倒数法.**

当两个数都是正数时，可以先求出其倒数，视其倒数的大小，从而确定这两个数的大小.

**例8：**比较的大小.

[解析]根据两个分数的特征，不易化简约分，因此可求其倒数，通过比较倒数的大小来确定原数的大小.

[答案]的倒数是

的倒数是

.

[温馨提示]两个正数，倒数大的反而小.

**(4)变形法.**

比较大小，有时可以通过把这些数适当地变形，再进行比较.

**例9：**设，则有( ).

A.*a*<*b*<*c* B.*a*<*c*<*b* C.*b*<*c*<*a* D.*c*<*b*<*a*

[解析]*a*，*b*，*c*这三个数都与“1”接近，因此可将这三个数分别与“1”相减，再来比较它们的“接近程度”，从而可确定它们的大小关系.

.

又∵

∴*a*<*b*<*c*.

故选A.

[答案]A

**专题5 用“赋值法”解题**

在做选择题和填空题时，问题的结论如果运用法则、定义等推导，有些题容易，而有些题很复杂，对于那些推导过程比较复杂的题目可采取“赋值法”，这样能又快又准地得出结论.

**例10：***m*-*n*的相反数是( ).

A.-(*m*+*n*) B.*m*+*n* C.*m*-*n* D.-(*m*-*n*)

[解析]可设*m*=2，*n*=1，则*m*-*n*=1.又因为-(*m*+*n*)=-3，*m*+*n*=3，*m*-*n*=1，-(*m*-*n*)=-1，故选D.

[答案]D

[点拨]赋值时取值要符合题意，但又不能特殊，本题中*m*，*n*不能取0，得出结论后可以再用其他值试一试.

**专题6 运用运算律简化运算**

有理数的混合运算通常按“先乘方，再乘除，最后加减，如果有括号，先算括号里面的”的运算顺序进行运算，有些有理数的混合运算，根据题目特点可以灵活地应用运算律进行简便计算，提高解题速度.

**例11：**计算：

[解析]第二项可以拆项为

[答案]

=830-578=252.

[点拨]运用乘法运算律，或者逆用运算律有时都可以起到简化运算的作用.

**专题7 数形结合思想**

数形结合思想就是通过数、形之间的相互转化来研究和解决数学问题的思想.数轴的引进将数与形结合起来，使我们能够生动、直观、简捷地阐明事物的本质，是了解数学的重要方法.

**例12：**|*a*|>|*b*|，*a*>0，*b*<0，把*a*、*b*、-*a*、-*b*按由小到大的顺序排列.

[解析]将*a*、*b*、-*a*、-*b*在数轴上把对应点的位置找出来，就可以比较大小了.

[答案]由*a*>0，*b*<0，知*a*为正数，*b*为负数，*a*、*b*所对应的点分别在数轴上原点的右边和左边.由于|*a*|>|*b*|，从绝对值的几何意义可知，表示数*a*的点离原点的距离比表示数*b*的点离原点的距离远，而*a*与-*a*互为相反数，它们在原点两侧且到原点的距离相等.同理*b*与-*b*也在原点两侧且到原点的距离相等，即*a*、-*a*、*b*、-*b*在数轴上的位置如图所示.

Image1

故由小到大的顺序排列为-*a*<*b*<-*b*<*a*.

**例13：**有理数*a*、*b*、*c*的位置如图所示，计算|*a*+*b*|-|*b*-1|-|*a*-*c*|-|1-*c*|.

Image2

[解析]利用数轴得出*a*、*b*、*c*及1的大小关系，确定*a*+*b*，*b*-1，*a*-*c*，1-*c*的符号，进而去掉绝对值符号.

[答案]由数轴可知，*b*<*a*<0<*c*<1，

∴*a*+*b*<0，*b*-1<0，*a*-*c*<0，1-*c*>0.

∴|*a*+*b*|=-(*a*+*b*)，|*b*-1|=-(*b*-1)，|*a*-*c*|=-(*a*-*c*)，|1-*c*|=1-*c*.

∴原式=-(*a*+*b*)-[-(*b*-1)]-[-(*a*-*c*)]-(1-*c*)

=-(*a*+*b*)+(*b*-1)+(*a*-*c*)-(1-*c*)

=-*a*-*b*+*b*-1+*a*-*c*-1+*c*

=-2.

**专题8 分类讨论思想**

当我们所要研究的问题的结果有多种情形，而不能归结到同一种模式下的时候，必须按可能出现的所有情况来分别讨论，得出问题在各种情况下相应的结论，最后将各种结论进行汇总，这种处理问题的方法就是分类讨论思想.

在有理数及其运算中，涉及分类讨论思想的知识点较多，比如：有关数轴、绝对值、偶次幂的题目往往涉及多种情况，需要运用分类讨论思想才能将题目回答完整.

**例14：**比较有理数3*a*和-3*a*的大小.

[解析]因为*a*的取值不确定，所以要分*a*>0，*a*=0，*a*<0三种情况进行讨论.

[答案]有以下三种情况：①当*a*>0时，3*a*>0，3*a*的相反数-3*a*<0，则3*a*>-3*a*；②当*a*=0时，3*a*=-3*a*=0：③当*a*<0时，3*a*<0，3*a*的相反数-3*a*>0，则3*a*<-3*a*.

[方法规律]对于无法确定其取值的有理数，常运用分类讨论思想来解决问题.

**专题9 整体代入思想**

**例15：**若*a*，*b*互为倒数，*x*，*y*互为相反数，|*m*|=3.求下列各式的值：

(2)5*ab*-*m*+*x*-4+*y*； (3)5*x*-*ab*+5*y*.

[解析]互为倒数的两数之积为1，互为相反数的两数之和为0，绝对值为3的数是±3.

[答案]因为*a*，*b*互为倒数，*x*，*y*互为相反数，且|*m*|=3.

所以*ab*=1，*x*+*y*=0，*m*=±3.

(±3)2=0.

(2)5*ab*-*m*+*x*-4+*y*=5*ab*-4-*m*+(*x*+*y*)=5-4-*m*+0=1-*m*.

当*m*=3时，原式=1-*m*=-2；

当*m*=-3时，原式=1-*m*=4.

(3)5*x*-*ab*+5*y*=5(*x*+*y*)-*ab*=-1.

[点拨]对于(2)要考虑全面；(3)要利用加法交换律和乘法分配律得到“5(*x*+*y*)”.

**专题10 概念、计算综合题**

**例16：**若*a*与*b*互为相反数，*x*与*y*互为倒数，*m*的绝对值和倒数均是它本身，*n*的相反数是它本身，求的值.

[答案]因为*a*与*b*互为相反数，所以*a*2013+*b*2013=0.

因为*x*与*y*互为倒数，所以*xy*=1.

因为*m*的绝对值和倒数均是它本身，所以*m*=1.

因为*n*的相反数是它本身，所以*n*=0.

所以

=0-9-1-0=-10.

**专题11 转化的思想**

将所要研究和解决的问题转化为另一个较容易解决的问题或已经解决的问题，即把“新知识”转化为“旧知识”，把“未知”转化为“已知”，把“复杂”问题转化为“简单”问题.在本章中处处体现着这种思想.如有理数的减法转化成有理数的加法，有理数的除法转化成有理数的乘法.

**例17：**计算：.

[解析]这些加数从形式上看没有规律，但仔细分析会发现，分母是两个连续自然数之积，分子是两个连续自然数之和，因此可以把每个分数拆成两个分数的和，即，然后再进行计算.

[答案]原式=

.

**例18：**计算：13+23+33+43+…+993+1003.

[解析]直接求解有难度，可探索规律，将运算进行转化.

[答案]13=1，13+23=9=32=(1+2)2，

13+23+33=36=62=(1+2+3)2，

13+23+33+43=100=(1+2+3+4)2，…，

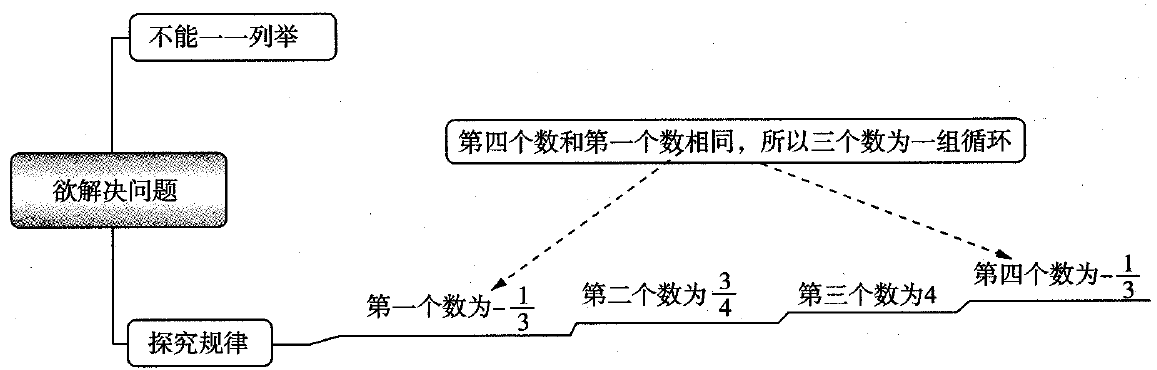
由此可知13+23+33+43+…+993+1003=(1+2+3+4+…+99+100)2

[方法归纳]把“立方”运算转化为“平方”运算，把“求和”运算转化为“乘方”运算是本题的解题关键.

**专题12 探索规律**

**例19：**定义：*a*是不为1的有理数，我们把称为*a*的差倒数，如：2的差倒数是=-1，-1的差倒数是.已知,是的差倒数，是的差倒数，是的差倒数，以此类推，则=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

图解思路



规范解答

利用差倒数计算可得：

所以，三个数为一个循环.而2014÷3，商671余1.

所以，第2014个数和第1个数相同，为

**【变式训练】**

下面两个多位数1248624…、6248624…，都是按照如下方法得到的：将第1位数字乘以2，若积为一位数，将其写在第2位上，若积为两位数，则将其个位数字写在第2位；对第2位数字再进行如上操作得到第3位数字，后面的每一位数字都是由前一位数字进行如上操作得到的.当第1位数字是3时，仍按如上操作得到一个多位数，则这个多位数前100位的所有数字之和是( ).

A.495 B.497 C.501 D.503

答案：A. 提示：按上述规律，以3开头的多位数是：362486248…，前100位数字中第一个数字是3，然后依次为62486248…，共24个6248，最后三位数字是624，所以前100位数字之和是3+24×20+12=495.

**例20：**根据乘方意义可知：

Ⅰ 23×24=(2×2×2)×(2×2×2×2)=2×2×2×2×2×2×2=27，类似的

Ⅱ (2×3)3=(2×3)×(2×3)×(2×3)=2×3×2×3×2×3=(2×2×2)×(3×3×3)=23×33

(1)猜想：*am*·*an*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，(*ab*)*n*=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

(2)利用(1)得到的结论，计算

**满分解答：**

(1)*am*·*an*=*am*+*n*，(*ab*)*n*=*an*·*bn*

**技巧贴士：**

由乘方的意义可以得到以下推理：

这两条结论称为“同底数幂的运算法则”和“积的乘方运算法则”，如(2)中的计算方法，在很多乘方运算中，利用这两个法则可以简化运算.又如计算(-5)3×我们不需要将每一个乘方都计算出来再相乘，可以利用(1)中的第一个结论，先将拆成再与(-5)3相乘得再根据(1)中的第二个结论

**同步训练**

1.关于0有下列说法：①既不是正数，也不是负数；②是整数；③不是最小的整数，是最小的有理数；④不是自然数，是有理数.正确的个数是( ).

A.1 B.2 C.3 D.4

答案：B

2.下面是按一定规律排列的一列数：

第1个数：

第2个数：

第3个数：

……

第*n*个数：

那么，在第10个数、第11个数、第12个数、第13个数中，最大的数是( ).

A.第10个数 B.第11个数 C.第12个数 D.第13个数

答案：A.

3.比较两个有理数之间的大小：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_-0.76；

答案：>，<

4.比大而比小的所有整数的和为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案：-3

5.已知有理数*a*、*b*在数轴上的位置如图所示，化简：|-*a*|+|*b*+1|-|*a*|-|*b*|.

Image5

解：|-*a*|+|*b*+1|-|*a*|-|*b*|

=(-*a*)+(*b*+1)-(-*a*)-*b*

=-*a*+*b*+1+*a*-*b*

=1.

6.已知*a*与*b*互为相反数，*c*与*d*互为倒数，*x*的绝对值等于2，试求*x*3-(*a*+*b*)2011+(-*c*·*d*)2012的值.

答案：因为*a*与*b*互为相反数，所以*a*+*b*=0.

又因为*c*与*d*互为倒数，所以*c*·*d*=1.

又因为|*x*|=2，所以*x*=2或*x*=-2.

因此，*x*3-(*a*+*b*)2011+(-*c*·*d*)2012=*x*3-02011+(-1)2012=*x*3+1.

当*x*=2时，*x*3+1=23+1=8+1=9；

当*x*=-2时，*x*3+1=(-2)3+1=-8+1=-7.

7.计算：

(1)； (2)；

(3)； (4).

答案：(1)0 (2) (3) (4)

8.用适当的方法计算：

(1)； (2)；

(3)； (4).

答案：(1) (2)0 (3) (4)